

Eesti LXX matemaatikaolümpiaad
TALLINNA KOOLIVOOR
12. jaanuaril 2023.a. Tallinnas
XII klass

Lahendamiseks on aega 4 tundi.

Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti.

Taskuarvutit kasutada ei lubata.

1. Apteeker Melchior hoidis salveisemneid kuubikujulises puukarbis. Karp oli seemneid täis. Apteegis inventuuri tehes pani ta tähele, et ülemise riiuli tagaseinas on tal üks tühi koonusekujuline klaasnõu, millega on salveisemneid apteegis ilusam klientidele eksponeerida. Ruumalade võrdlemisel selgus, et koonusekujulise klaasnõu ruumala on täpselt $\frac{3}{7}$ kuubikujulise puukarbi ruumalast. Melchior valas puukarbist nii palju seemneid klaasnõusse, et seemnete kõrgus klaasnõu põhjast oli täpselt $\frac{1}{2}$ klaasnõu kõrgusest. Arvestamata klaasnõu ja karbi seinte paksusi, leidke kui suur osa algselt puukarbis olnud seemnetest jäi selle tagajärjel puukarpi? Märkus: koonusekujuline klaasnõu seisab koonuse põhja peal.

2. On antud funktsioonid:

$$f(x) = 1 - 2\sin^2 x$$

$$g(x) = (1 - \sin x)(1 + \tan x)(1 + \sin x)(1 - \tan x)$$

$$h(x) = (\cos x + \sin x)(\cos x - \sin x) \text{ ja}$$

$$i(x) = \cos^4 x - \sin^4 x.$$

- 1) Leidke kõik argumendi x väärtused, mille korral $f(x) = g(x) = h(x) = i(x)$.
- 2) Milliste argumendi x väärtuste korral lõigust $[-\pi; \pi]$ on funktsiooni $y = g(x)$ väärtus võimalikest suurim?
3. Naturaalarvude jada (a_n) algab arvudega 1, 3, 4, 7, 11, ..., kusjuures jada iga järgnev liige alates kolmandast on võrdne sellele eelneva kahe liikme summaga (st $a_k = a_{k-1} + a_{k-2}$ iga $k \geq 3$ korral). Millised järgmistest väidetest on tõesed ja millised on väärad? Põhjendage.
 - 1) Jada 2023-s liige a_{2023} on paarisarv.
 - 2) Jada esimese 2023 liikme seas on täpselt 506 arvu, mis jaguvad arvuga 3.
 - 3) Selles jadas pole ühtki arvu, mis jaguks arvuga 5.
4. Leidke kõik sellised reaalarvu x väärtused, mille korral kehtib võrdus

$$\sqrt{x+3} + \sqrt{-x-2} = x^2 + 5x + 7$$

5. Ringis seisab 2022 tooli, mis on nummerdatud 1-st kuni 2022-ni. Kolm konna istuvad 2022. toolil ning hakkavad hüppama samas suunas mööda toolide ringi. Hüppe käigus liigub konn kõrvaltoolile, mille number on ühe võrra suurem, kui sellel toolil, millelt ta hüppab. 2022. toolilt hüppab konn 1. toolile. Esimene konn jõuab esimese tunniga teha vaid ühe hüppe, teine konn 2 hüpet, kolmas konn 3 hüpet. Iga järgneva tunni jooksul teeb iga konn kolm hüpet rohkem kui eelneva tunni jooksul. Näiteks teeb teine konn teise tunni jooksul 5 hüpet ning asub tunni lõpuks 7. toolil, kolmanda tunni jooksul teeb 8 hüpet ning lõpetab 15. toolil. Mõne aja pärast satuvad kaks konna esimestena mingi tunni lõpuks ühele ja samale toolile. Millised kaks konna satuvad esimestena mingi tunni lõpuks ühele ja samale toolile ning mitmes tool see on?